MODELO MATEMÁTICO LINEAL FLEXIBLE PARA LA ROTACIÓN DE TURNOS DE TRABAJO DE LOS CONDUCTORES DEL SISTEMA DE TRANSPORTE MASIVO DEL ÁREA METROPOLITANA CENTRO OCCIDENTE

Presentado por:

Kenny Cárdenas Parra

Presentado como requisito
para optar al título de
Ingeniero Industrial

Director:

Ph.D. Mauricio Granada Echeverri

Universidad Tecnológica de Pereira

Co-director:

Ph.D.(c) Luis Miguel Escobar Falcón

Universidad Tecnológica de Pereira

Programa de Ingeniería Industrial

Facultad de Ciencias Empresariales

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

Pereira, Julio de 2019

Agradecimientos

- A la vida por permitirme vivir este momento en la historia
- A mis padres Diana, Pedro y Daniel por su apoyo incondicional, comprensión y paciencia.
- A Luis Miguel, por su acompañamiento como co-director de este trabajo de investigación
- A Christian, por su comprensión y paciencia.
- A Rubén y César, por acompañarme durante el proceso de investigación.
- Al profesor Mauricio por dirigir este trabajo de investigación.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

En este trabajo se presenta una nueva formulación matemática de programación lineal entera para resolver un problema de planeación operativa en sistemas de transporte público. El modelo matemático propuesto es flexible, es decir, se permite adicionar o eliminar restricciones específicas de la operación, según la legislación laboral del país correspondiente y las políticas empresariales de cada compañía. La formulación propuesta en este trabajo es una versión genérica del Problema de Rostering de Conductores de Autobús, la cual tiene una gran cantidad de variables a considerar, principalmente debido a la complejidad de la administración del personal y su asignación del servicio diario. Las principales limitantes que se tienen en cuenta en el modelo propuesto, corresponden a las condiciones de trabajo específicas, las regulaciones laborales de cada país, las políticas internas de las empresas y el personal disponible, dichas limitantes se incluyen como conjuntos de restricciones duras del problema.

Acorde a la revisión de la literatura especializada, se observa que existen una carencia de modelos matemáticos generales que representen esta clase de problemas y que además pueden ser usados en casos reales. En consecuencia, la mayoría de las investigaciones publicadas relacionadas con este problema se refieren al desarrollo de soluciones heurísticas o meta-heurísticas. Así mismo, diferetnes enfoques híbridos de dos fases que combinan metodologías heurísticas y exactas han sido publicados; sin embargo, dichos enfoques no garantizan soluciones óptimas en ninguna de las dos etapas, toda vez que, no utilizan métodos exactos puramente.

En este estudio, la solución exacta del modelo propuesto es validada en dos escenarios diferentes: (i) se utilizan un conjunto de instancias de la literatura especializada y (ii) diferentes instancias reales de una empresa de transporte público de un sistema de tránsito rápido de autobuses (BRT por sus siglas en inglés de Bus Rapid Transit) en Colombia, específicamente en el Área Metropolitana del Centro Occidente. Los experimentos computacionales muestran que un solucionador comercial de programación entera mixta (MIP) es capaz de obtener soluciones óptimas para cada uno de los escenarios mencionados

en tiempos de cómputo razonables.

Abstract

In this work is present a novel integer linear programming formulation to solve an operation planning problem in public transport systems. The proposed model is flexible and it works by adding or removing specific constraints for the operation, depending on the laws of the corresponding country and the policies of a particular company . The formulation proposed in this work models a generic version of the Bus Driver Rostering Problem, which has a considerable amount of issues to be considered, mostly due to the complexity of the personnel management and their assignment of the daily duty. The main issues taken into account in the model are the specific work conditions, labor regulations for each country, companies' internal policies and available staff. These are included as sets of hard constraints of the problem. In the literature, it was observed that there is a lack of general mathematical models representing this class of problems. Consequently, most of the published research related to this problem concern the development of heuristic solutions. Moreover, two-phase hybrid approaches combining heuristic and exact methodologies, for the first and second stage, respectively, are not able to ensure optimal solutions. In this study, the model is tested on two different scenarios: (i) benchmark instances and (ii) real case of a public transport company of a Bus Rapid Transit (BRT) system in Colombia, specifically in the Western-Center Metropolitan Area. Computational experiments show that a mixed integer programming (MIP) solver is capable of obtaining optimal solutions for each of the aforementioned scenarios in reasonable computing times

1. Introducción

En el mundo actual, las empresas eficientes requieren de programas de cómputo y métodos cuantitativos que les permita automatizar gran parte de sus procesos y manejar innumerables problemas que se presentan a diario de gran complejidad, ya sea elaborando productos o prestando servicios; lo que permite disminuir la carga de los problemas mal estructurados a la administración de las empresas, dejando dichos problemas a las herramientas tecnológicas junto con modelos matemáticos que describan de la mejor manera los ambientes reales a los que ese enfrentan las compañías en la actualidad.

Para solucionar los problemas de las empresas (problemas de negocios), se han desarrollado diferentes métodos de Investigación de Operaciones (IO) aplicados a un sinnúmero de realidades, y aunque el mismo tipo de problema ocurra en muchas industrias, los modelos empleados para dar solución a dichos problemas se pueden agrupar de manera básica a través de la estadística, matemática y la teoría de probabilidades, para lo cual, se han identificado de manera general, 13 zonas clasificatorias de problemas de IO a saber: teoría de probabilidades, técnicas matemáticas, modelos de secuenciación, asignación, reemplazo, inventarios, programación dinámica, modelos competitivos, técnicas de simulación, modelos de ruta, métodos de búsqueda y heurísticos y los métodos combinados de investigación de operaciones (Thieruf, 2008).

Cabe resaltar que, uno de los mayores problemas que tienen en común las empresas, es la asignación del personal al proceso de producción o prestación de servicios; dicho problema se presenta cuando hay que realizar varias actividades y existen diferentes maneras de realizarlas con recurso humano e infraestructura limitados. La solución a este problema consiste en combinar las actividades y los recursos de forma óptima de modo que la eficiencia general de la empresa se aumente al máximo, es decir se aumentan las utilidades y se disminuyen los costos.

De acuerdo a literatura especializada, el problema más sencillo de asignación es aquel cuando se tiene que asignar un número de actividades a igual número de recursos, el problema se hace complejo cuando alguna de las tareas requiere más de un recurso o si los recursos pueden ser empleados en más de una tarea.

Diferentes tipos de problema reales pueden ser tratados de manera general como un problema de asignación, entre ellos, se encuentra el problema clásico de transporte, asignación de salones de clase, asignación de horarios de clase, asignación de personal de salud para cubrir turnos en un hospital, asignación de la tripulación en las aerolíneas, en trenes, asignación de personal a los buses del sistema de transporte público de las ciudades, entre muchos otros.

Uno de los grandes problemas que enfrentan las ciudades de los países en desarrollo, es el crecimiento desmedido de las zonas urbanas, ya que esto implica una mayor complejidad a la hora de planificar y estructurar su sistema de transporte para movilizar los ciudadanos de tal manera que, se satisfagan las necesidades particulares y condiciones de confort.

La asignación de conductores en las empresas de transporte, es una de las tareas más complejas y requiere gran cantidad de tiempo en la gestión de la operación. Este proceso es un problema de gran interés ya que sin duda alguna la nómina de los operarios representa uno de los costos más elevados dentro del presupuesto de la operación de los sistemas de transporte público (Ceder, 2007).

1.1. Planteamiento del problema

De manera general, las empresas operadoras de transporte público de pasajeros presentan dificultades al momento de asignar los turnos de los conductores y sus buses, entre las cuales se destacan la insatisfacción de los horarios de trabajo de los colaboradores de la empresa por la subjetividad al momento de otorgar las rutinas, el salario percibido debido a la diferencia entre conductores causada por la realización de horas extras, la optimización del recurso humano y los vehículos para cubrir la totalidad de los servicio. Todos estos problemas se generan en parte, porque tradiconalmente los sistemas de transporte Público de pasajeros e asignan los turnos de trabajo de manera maual, es decir, no existe un sistema de asignación automático y equitativo que permita disminuir la insatisfación del personal, optimizar el recurso humano y mejorar la prestación del servicio percibida por los usauarios.

Una mala planeación operativa, impacta de manera negativa la canasta de costos de la operación del transporte público, y no permite satisfacer de manera adecuada la demanda del servicio, puesto que la insatisfacción del conductor puede provocar una alta rotación de personal y ausentismo debido a la inconformidad dentro de su cargo, dicho impacto tambien se ve reflejado sobre el personal administrativo encargado de diseñar las rutinas de trabajo, quienes utilizan tiempos elevados en la construaccón y asignación de cada uno de los turnos, tiempo que puede ser aprovechado para solucionar otros problemas más delicados dentro de la organización.

En la actualidad existen diversas herramientas tecnológicas que ofrecen soluciones de muy buena calidad para los diferentes problemas de la planeación operativa, siendo el Rostering uno de los de mayor relevancia, sin embargo, dichos softwares presentan un costo elevado, lo que imposibilita la adquisición e implementación por parte de las organizaciones operadoras.

Desde el punto de vista académico, el problema de rostering se enmarca dentro de los problemas combinatorios de dificil solción tipo NP-hard y el campo de estudio corresponde a la investigación de operaciones, rama de la ciencia que permite diseña e implementar soluciones de bajo costo para resolver diversos problemas dentro de las organizaciones.

Para el caso específico de esta investigación, el problema de la asignación de turnos de conductores, existe un símil en la literatura especializada denominado BDSP (*del inglés Bus Driver Scheduling Problem*, el cual presenta diversos modelos matemáticos, que resueltos de manera exacta conllevan a la solución óptima del problema de asignación de conductores, sin embargo, debido a la naturaleza de los problemas reales de las empresas de transporte público de pasajeros, el problema ha sido abordado desde el puno de vista de las técnicas de solución aproximadas, como técnicas heurísticas, metaheurísticas y la combinación de estas con técnicas de solución exactas que permiten resolver el problema en tiempos de cómputo razonables sin asegurar optimalidad en la solución.

1.2. Justificación del Problema

En la actualidad uno de los grandes problemas que presentan las ciudades correponde a la movilidad, en especial la operación de transporte público de pasajeros debido al crecimiento exponencial de la población en las urbes, lo cual ha llevado a que las empresas que operan estos servicios dentro de las ciudades busquen la manera de optimizar su planeación operativa para satisfacer la demanda del cliente y reduzcan costos incurridos en ofrecer este servicio.

Dentro de la planeación operativa, la asignación de los turnos de trabajo a los conductores que operan las rutas de transporte contituye uno de los probelmas mas difíciles de solucionar, debido a que es necesario realizar la totalidad de servicios progrmados utilizando la menor cantidad de buses y a su vez, la menor cantidad de conductores, lo cual se denomina BDSP.

Tradiconalmente, en Latinoamérica la operación de los sistemas de transporte público ha sido tratada de manera empírica, lo cual conlleva a qu las empresas operadoras de estos sistemas solucionen dicho problema de manera manual y aproximada. Así las cosas, la implementación de un modelo matemático que ayude a encontrar una solución casi óptima u óptima al problema es indispensable para la optimización de la planeación operativa de las empresas operadoras.

Una de las formas abordar este problema es por medio del bien conocido Problema de Rostering, el cual plantea encontrar un modelo matemático que asigne un conjunto de rutinas de trabajo en un periodo de tiempo determinado a un conjunto de colaboradores, en un periodo que puede ser semanal, mensual o anual; en diferentes artículos académicos, se plantea la solución a este problema de asignación en el área de la salud (programar los turnos semanalas del personal de enfermería) y en el área de transporte aéreo (programando los turnos mensuales o anuales de la tripulación de los vuelos) mejorando de manera significativa la planeación operativa en estas áreas de trabajo. Por ende, es atractivo realizar esta investigación, debido a la falta de aplicación del Rostering en las empresas locales que operan el servicio de transporte publico de pasajeros.

1.3. Pregunta de investigación

¿Cuál es el modelo matemático ideal que ayude la optimización para la planeación operativa de los conductores de una de las empresas operadoras del transporte público de pasajeros masivo del Área Metropolitana Centro Occidente (AMCO)?

1.4. Sistematización del problema

- ¿Qué modelos matemáticos se han implementado en problemas de asignación de turnos de conductores en otras empresas, ciudades o países?
- ¿Cuál es la información necesaria para modelar el problema desde los diferentes modelos?
- ¿Cómo implementar los modelos encontrados al problema especifico de una de las empresas operadoras del transporte público de pasajeros masivo del AMCO?
- ¿Qué diferencias hay en relación a la forma manual utilizada actualmente y los modelos aplicados?

1.5. Estructura del documento

El documento esta organizado de la siguiente forma: primero se presenta un marco referencial y estado del arte, luego se realiza una descripción formal del problema de Rostering. Posteriormente se plantean las formulaciones matemáticas para los casos de prueba del modelo y el modelo matemático que resuelve el problema de Rostering en la empresa operadora del AMCO. En la parte final se presentan los resultados computacionales de los casos de prueba; seguido se presentan las conclusiones de la investigación y los trabajos futuros. Al final del documento existe un Anexo donde se encuentran todas las soluciones de las instancias que se utilizaron para validar el modelo antes de su implementación en el caso de la empresa operadora del AMCO.

2. Objetivos de la investigación

2.1. Objetivo general

Encontrar un modelo matemático el cual se adapte al problema de optimización para la planeación operativa de los conductores de transporte masivo de una de las empresas operadoras del AMCO.

2.2. Objetivos específicos

- Realizar una revisión del estado del arte sobre el BDSP (*Bus Driver Scheduling Problem*), el cual detalle los modelos matemáticos utilizados para la solución de este problema.

- Recolectar la información necesaria en una de las empresas operadoras de transporte público masivo de pasajeros del AMCO, requerida por el problema.

- Modelar matemáticamente el BDSP en la empresa seleccionada que opere el transporte público masivo de pasajeros, según los modelos encontrados en la revisión del estado del arte.

- Desarrollar el modelo matemático para encontrar las soluciones a los distintos modelos.

- Analizar los resultados obtenidos al desarrollar los modelos matemáticos.

3. Marco referencial y Estado del arte

3.1. Estado del arte

Acorde a lo estipulado en la literatura especializada, el modelamiento matemático para la asignación de turnos de trabajo a la tripulación de buses tipo BRT en un periodo determinado (Rostering), se puede desarrollar desde distintos tipo de modelos matemáticos estudiados por la investigación de operaciones en diferentes aplicaciones o en problemas con un grado alto de similitud y complejidad.

3.1.1. Problema Rostering

La planeación operativa en el sector transporte se constituye en un problema complejo y se encuentra dentro de los denominados problemas de tipo NP-duro, lo que significa que existe un conjunto de subproblemas conectados entre sí y que dependen uno de otro, además no existe un método o algorimto capaz de solucinarlo en tiempos de cómputo razonables en problemas de gran tamaño o en aplicaciones reales, razón por la cual, es necesario dividirlo en subproblemas independientes de redes Mahn Borkowsky et al. (2013).

Diferentes autores han definido las etapas requeridas para la planeación operativa de transporte público, dlas cuales son similares conceptualmente, pero difieren en los nombres. La definición establecida por Sousa Sousa et al. (2000) establece las siguientes etapas: red de atención, una tabla de horarios, asignación de los vehículos y asignación de los conductores. En algunos casos, la asignación de conductores contempla dos subetapas a saber: en la primera se asignan los conductores de manera diaria, y la segunda realiza la asignación en un horizonte de tiempo determinado, es decir, se contruye el denominado Rostering.

La definición planteada por Weider (Ceder, 2007), divide el transporte público en dos fases: (i) planeamiento estratégico y (ii) planeamiento operacional, en este último, se realiza la programación y asignación de los recursos necesarios para la operación de la empresa (buses, turnos de trabajo, personal, etc.).

En el trabajo presentado por Wren and Rousseau (1995), se propone denominar el problema como “Transit Scheduling”, donde la Administración Federal de Tránsito de Estados Unidos explica con detalles cómo se deben de realizar cada una de las etapas para obtener una programación eficiente, la estructura propuesta es la siguiente:

- “Trip generation” (Generación de viajes)...
- “Blocking” (Generación de bloques)...
- “Runcutting” (Partición de rutinas)...
- “Rostering” (Generación de listados)...

cabe resaltar que, los diferentes autores coinciden en que en la última etapa se programa el recurso humano, por esta razón, en la literatura se denomina *programación del personal*, tal como lo establece Ernst et al. (2004). Dicha programación está dividida en dos etapas: la primera es la asignación de turnos al personal, conocida en la literatura como *crew scheduling* Ceder (2007) y en la segunda etapa, la solución del crew scheduling constituye la entrada para la generación de rósters, conocida como *crew rostering*. De manera general, el crew rostering puede ser definido como la asignación de tareas o turnos de trabajo en un periodo de tiempo, cumpliendo una serie de reglas Borndörfer et al. (2015). La diferencia con el crew scheduling, consiste en que la asignación se debe realizar en un periodo de tiempo conocido como horizonte del róster. En la medida en la cual el horizonte aumenta, encontrar una solución factible al problema se torna más complejo Ernst et al. (2004); sin embargo, en algunos casos prácticos, donde sólo existe un tipo de turno, se puede ampliar el horizonte a un año, como se presenta en Azmat and Widmer (2004).

Existen dos tipos de róster: el primero de ellos es el róster cíclico, donde la mayoría del personal de la organización presenta las mismas características, en este caso, no es necesario encontrar una solución para cada colaborador, sino que estos se clasifican en grupos similares. Con el fin de tener una rotación justa en los turnos, se realiza una alternancia de asignación de listados entre los grupos al transcurrir un periodo de tiempo determinado. En Xie and

Suhl (2015), los autores realizan una rotación semanal de los listados de turnos asignados a cada uno de los grupos en los que se ha clasificado el personal.

El segundo tipo de róster, denominado no-cíclico, resulta más complejo de solucionar porque se aumentan considerablemente las variables. Este tipo de róster, construye un listado para cada uno de los empleados vinculados a la organización, teniendo en cuenta sus necesidades personales Moz et al. (2009). Generalmente las empresas que ofertan servicios, por la naturaleza de estos, requieren una mayor cantidad de tipos de turnos, ajustándose de manera más adecuada a los requerimientos de las empresas para satisfacer sus demandas.

En la década del 80 se hacen las primeras aproximaciones a este problema; solucionándolo únicamente a través de heurísticas. Estos estudios han dejado como resultado los siguientes softwares comerciales: TRACS, COMPACS, RUCUS y HOT. Posteriormente, utilizando modelos matemáticos, se desarrollaron nuevos paquetes de software como IMPACS, TRACS II y HASTUS Quintero Toro et al..

Diferentes enfoques se han utilizado para solucionar el problema de rotación de personal. En Ernst et al. (2004) y Ma et al. (2014),se presenta el siguiente panorama de metodologías de solución:

- Modelamiento de la demanda
- Enfoques de Inteligencia Artificial (AI)
- Programación de restricciones (CP)
- Meta-heurísticas
- Enfoques de programación matemática
- Heurísticas

En la revisión de literatura especializada trealizada en este trabajo se identifica que las metaheurísticas son la alternativa de solución más utilizada por su practicidad Ernst et al.

(2004), aunque no garantizan óptimos globales, la relación (calidad de solución)/(tiempo de cómputo), es conveniente en casos de gran tamaño.

Desde el enfoque de modelamiento matemático, la formulación más utilizada para resolver el problema general de rostering, es el *Set Covering* de Dantzig (Dantzig, 1954) propuesto en 1954, el cual genera los róster factibles para encontrar el óptimo. Varios aspectos determinan el modelamiento de este problema, como lo son la demanda de personal, la demanda de tareas o las demandas mixta (tareas y personal) (Ernst et al., 2004).

La programación lineal entera (PLE), es una forma poco común de abordar este problema, debido a la gran cantidad de variables y restricciones que utiliza; por esto se recomienda evaluar el esfuerzo requerido para encontrar la solución, frente a los beneficios adicionales (Ernst et al., 2004).

Quintero Moncada et al. (2013) diseñan un modelo matemático de programación lineal, y usan como método de solución un algoritmo de *Branch and Price*, donde buscan satisfacer las restricciones del modelo lineal mediante un proceso iterativo mejorando la solución. Este modelo se diseña para el Sistema de Transporte Masivo del AMCO de Colombia, el cual es de tipo BRT. El algoritmo se simula para turnos de 8 horas con la demanda establecida por periodo, el número máximo de colaboradores trabajando y el mínimo de personas descansando, donde se realizan varios casos de prueba para comprobar si el algoritmo puede satisfacer los requerimientos reales de la empresa, dejando como resultado final una herramienta para la toma de decisiones del personal encargado de la planeación de los turnos de trabajo de los conductores y la rotación de los mismos.

El trabajo presentado por Mahn Borkowsky et al. (2013), se plantea un método de solución secuencial para los problemas de *Crew Scheduling* y *Crew Rostering*, aplicado a sistemas de transporte que utilicen trenes subterráneos, donde primero se resuelve el problema de *Crew Scheduling* para utilizar esta información, como una entrada al problema de *Crew*

Rostering. el método realiza pruebas sobre las metaheurísitcas de *Búsqueda tabú* y *Algoritmo de Recocido Simulado* en un conjunto de instancias construidas por el mismo autor para simular distintos casos de sistemas de transporte en trenes.

BORND et al. (2015) propone dos modelos para la solución del problema aborado en este trabajo, sin emabrgo el autor los denomina *Duty rostering*, el primero de estos es un modelo de flujo básico para el pobrlema de generación de listados y el segundo corresponde a un modelo de *Set partitioning*. Se aplica el segundo modelo a un caso de rostering cíclico, se describe el modelo y se exponen sus resultados, encontrando una solución para un caso real en un tiempo de cómputo de 45 minutos.

Una nueva aplicación del algoritmo genético se puede evidenciar en el trabajo realizado por Ma et al. (2014), donde se aborda el problema *Crew Rostering* con el objetivo de presentar una solución balanceada para todos los conductores en una enmpresa de buses, comparando la solución obtenida, con otros casos de aplicación donde no se tiene en cuenta este balance en la solución: el método encuentra soluciones de mejor calidad y en algunos casos, menor cantidad de rósters.

A corde a la revisiñon realizada en este trabajo, se evidencia el amplio uso del Rostering para la programación de tripulación de aviones, trenes y buses tipo BRT (Ma et al., 2014),(Dowling et al., 1997), (Moz et al., 2009),(Kohl and Karisch, 2004). De manera general, en Colombia los proceso de asignación de personal se han realizado de manera empírica y presentan poca documentación. La resolución de este tipo de problemas presenta mayor dificultad cuando la flota no es propia de la empresa, sino que es subcontratada, y los conductores son los propietarios de los vehículos, tal como en el sistema de trasporte urbano en la mayoría de las ciudades colombianas (Quintero Toro et al.).

3.2. Glosario

1. Róster: Listado de turnos a realizar en un horizonte de tiempo.
2. BRT: Bus Rapid Transit, tipo de transporte como el MEGABUS del AMCO. Quintero Moncada et al. (2013)
3. Modelo matemático: es un formulismo matemático que expresa relaciones de hechos, variables, parámetros que busca dar solución a un problema difícil de solucionar en la realidad.
4. Turno: Tiempo de trabajo el cual está asociado a la realización de unas tareas y deberes.
5. Tarea: Acción a realizarse durante un turno de trabajo que es necesaria para la operación de una organización.
6. Trabajador: Persona la cual se encuentra vinculada a una empresa.
7. Conductor: Trabajador especializado en realizar la tarea de conducción de vehículos.

3.3. Marco Legal

El Código Sustantivo del Trabajo (2004) o también conocido como el decreto 2663 de 1950, es la norma donde está reglamentado todo lo relacionado con el trabajo en Colombia, de allí es necesario conocer los articulos que estén relacionados con las jornadas laborales, horas extras y tiempos de descanso de cada uno de los conductores, los cuales son insumos necesarios para el desarrollo de la investigación.

En el Título IV, capitulo I del Código Sustantivo del Trabajo (2004), se define lo que es la jornada ordinaria y el trabajo suplementario, en la ley 1846 de 2017 articulo 1, se define el trabajo diurno como el que se realiza dentro de las (6 AM hasta las 9 PM) y el nocturno el que se realiza dentro de las (9 PM hasta las 6 AM).

En el Título V del Código Sustantivo del Trabajo (2004), se define la jornada máxima diurna y semanal donde el trabajador puede acordar con el patrono ya sea temporal o indefinidamente, donde la jornada máxima semanal debe de ser de 48 horas repartido entre 6 días, donde el día de descanso puede coincidir con el domingo. En este, el número de horas de trabajo diario podrá repartirse de manera variable durante la respectiva semana y podrá ser de mínimo cuatro (4) horas continuas y hasta diez (10) horas diarias sin lugar a ningún recargo por trabajo suplementario, cuando el número de horas de trabajo no exceda el promedio de cuarenta y ocho (48) horas semanales dentro de la jornada ordinaria de 6 AM a 9 PM.

En el artículo 165 del Código Sustantivo del Trabajo (2004), establece que "Cuando la naturaleza de la labor no exija actividad continuada y se lleve a cabo por turnos de trabajadores, la duración de la jornada puede ampliarse en más de ocho (8) horas, o en más de cuarenta y ocho (48) semanales, siempre que el promedio de las horas de trabajo calculado para un período que no exceda de tres (3) semanas, no pase de ocho (8) horas diarias ni de cuarenta y ocho (48) a la semana. Esta ampliación no constituye trabajo suplementario o de horas extras."

En el artículo 167 del Código Sustantivo del Trabajo (2004), se reglamenta lo siguiente:"Las horas de trabajo durante cada jornada deben distribuirse al menos en dos secciones, con un intermedio de descanso que se adapte racionalmente a la naturaleza del trabajo y a las necesidades de los trabajadores. El tiempo de este descanso no se computa en la jornada."

Los artículos 22, Ley 50 de 1990 y 168 del Código Sustantivo del Trabajo (2004), se reglamenta las horas extras dependiendo de si son nocturnas o diurnas, la cantidad máxima de horas extras que pueden realizar a la semana, su pago y sus tasas de remuneración.

En el artículo 170 del Código Sustantivo del Trabajo (2004), se expresa como se puede definir el salario si los turnos que realiza el empleado varían en el mes pudiendo ser nocturnos o diurnos, llegando a un acuerdo entre las dos partes para su remuneración.

4. Descripción del problema

En este trabajo se propone una nueva formulaciónmatemática del problema de asignación de personal, dicho problema se describe a partir del grafo presentado en la (Figura 1), construido con base en los trabajos presentados por Mahn Borkowsky et al. (2013), quienes propone un grafo dirigido para representar el problema general, donde los nodos son los servicios ofertados por el sistema y los arcos son la transición de servicios factibles para cada conductor; de manera similar, Xie and Suhl (2015) presentan un grafo de características similares, sin embargo, los autores específican con mayor grado de detalle las necesidades del problema a resolver, además, el grafo es construido para problemas de Rostering cíclicos, es decir, existe un grafo por cada conductor.

Para el caso del modelo presentado en esta investigación, el grafo se construye para un róster no-cíclico.

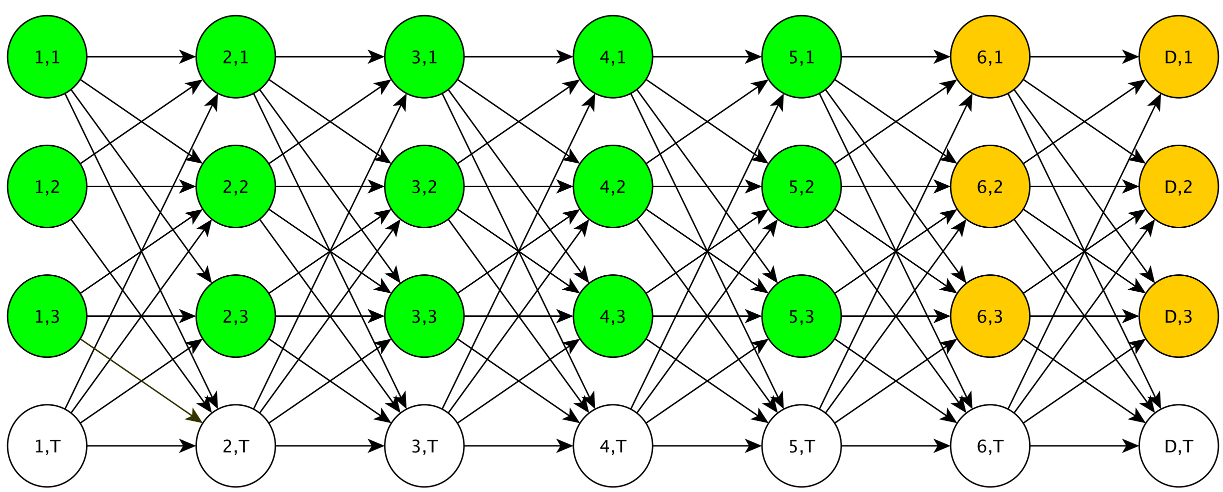

Figura 1: Grafo G de posibilidades para una semana.

En la Figura 1, D representa el número de días del horizonte del róster y T hace referencia a la cantidad de turnos que deben ser atendidos en la organización,con lo cual, se define un grafo $G = (N, A)$, donde $N \in \{J \times K\}$ es el conjunto de nodos, el cual se divide en los subconjuntos $J \in \{1, \ldots, D\}$ que representa los días y $K \in \{1, \ldots, T\}$ que hace referencia a la cantidad de turnos a cubrir. Por otro lado, el conjunto de aristas A está constituido por las transiciones inter día, es decir, una arista $a \in A$ conecta el nodo (d, t) con el nodo $(d+1, t)$.

Los nodos del grafo presentado en la Figura 1, se clasifican de la siguiente manera; (i) los nodos de color representan los servicios ofertados por la empresa que deben ser cubiertos para su operación, dividiéndose igualmente en dos colores, el color verde representa los servicios ofertados entre semana y el color amarillo los servicios ofertados en el fin de semana, ya que cada grupo tiene sus características; (ii) los nodos blancos, son aquellos que representan los turnos de descanso de cada día, estos se diferencian de los otros, al poder ser sobrecubiertos por más de un operario.

Las restricciones para la solución del rostering se clasifican en tres categorías: las reglas verticales, horizontales y de calidad. Las reglas verticales controlan los turnos diarios, evitando que un nodo sea atendido por más de un colaborador en un día, o que este sea asignado a más de un turno en un día. Las reglas horizontales representan la jurisdicción laboral de cada país, especificando aspectos como el número de días de descanso y el máximo número de días de trabajo consecutivos. Además, las políticas establecidas por la empresa generan restricciones horizontales y de calidad; estas últimas, especifican el número de turnos consecutivos de cierto tipo, la cantidad de horas para descansar entre los turnos, bienestar laboral y preferencias de los conductores (Xie and Suhl, 2015).

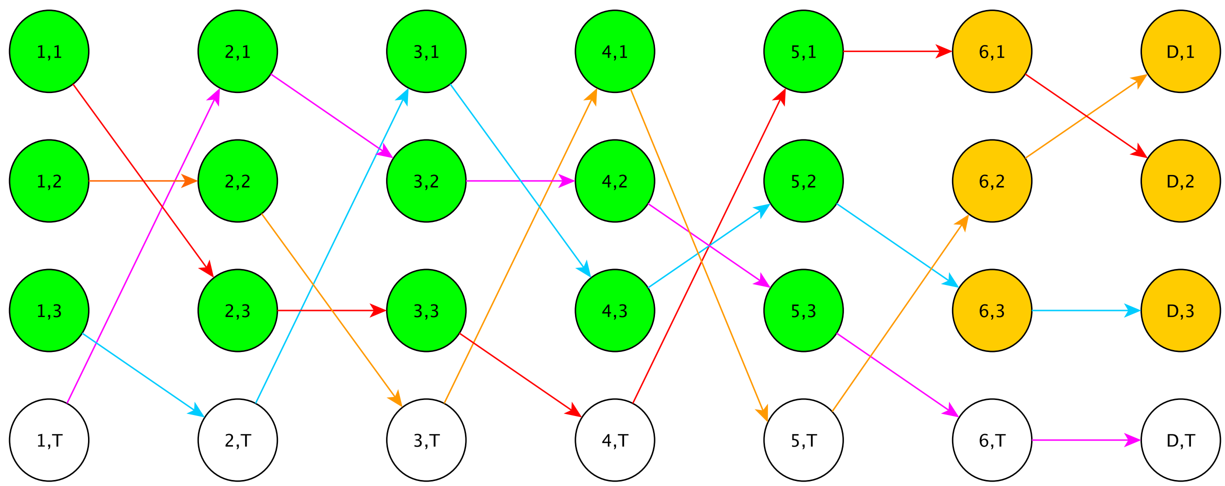

Figura 2: Grafo G de solución por semana.

El modelo matemático planteado para la solución del problema, busca encontrar el camino de mínimo costo que cubra todos los nodos de servicio, por medio de caminos de mínimo costo, loc cuales se construyen con un subconjunto de aristas acorde a las restricciones anteriormente nombradas. La solución al problema se puede evidenciar en la Figura 2, donde las aristas de color conectan un conjunto de tareas que deben ser realizadas por un conductor en un horizonte de tiempo dado. Los diferentes caminos de mínimo costo encontrados, indican la cantidad de personal necesario para realizar la totalidad de servicios (ndos) estipulados en la planeación táctica de un sistema de transporte de pasajeros.

4.1. Modelo para el Problema de Asignación Generalizada GAP(Generalized Assignement Problem)

El problema de asignación generalizada propuesto en el trabajo presentado por Martello and Toth (1992), se describe a partir de n ítems que deben ser asiganados a m unidades, de tal manera que, el total de recursos disponibles no se excede y la sumatoria de las penalidades relacionadas a la asignación sea la mínima. El modelo se expresa mediante el conjunto de ecuaciones (1)-(4).

4.1.1. Notación Matemática

- i Índice de los elementos, $i \in A$.
- j Índice de las unidades, $j \in B$.
- $A = a_{ij}$ Matriz binaria con dimensiones $m \times n$.
- $B = b_j$ Columna de elementos j.
- c_{ij} Costo no negativo asociado a la aseignación de un elemento i a una unidad j.
- x_{ij} Corresponde a la variable de decisión del probema, la cual toma el valor de 1 si un elemento i es asignado a una unidad j, de lo contrario toma el valor de 0.

4.1.2. Modelo Matemático

$$(GAP) = Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad \forall i = 1, ..., m \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_j \qquad \forall j = 1, ...n \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i = 1, ..., m, \forall j = 1, ...n \tag{4}$$

La función objetivo que se describe en la Ecución (1) es de minimización, donde cada variable $x_{i,j}$ está relacionada a una matriz de costos $c_{i,j}$; con dicha función, se busca reducir la sumatoria de de costos de asignacion asociados al probelma siempre y cuando sea factible.

El primer conjunto de restricciones de la Ecuación (2)hace referencia a que un sólo elemento i sea asignado a una unidad j y que todos los elementos i sean asignados.

El segundo conjunto de restricciones (3) asocia una matriz $a_{i,j}$ donde cada elemento representa la cantidad de recurso utilizado en la asignación $x_{i,j}$ y b_j es la columna de recurso disponible de tamaño j, de esta manera, la sumatoria de los recursos gastados por cada asignación no puede ser mayor a los recursos disponibles de cada unidad j.

4.2. Modelo SCP(Set Covering Problem)

Acorde a la revisión de la literatura especializada, se identifica que la mayoría de los modelos utilizados para la solución de los problemas de rostering se basan en el modelo de *Set Covering* propuesto por Dantzig (1954) y sus variaciones. El SCP tiene como objetivo cubrir todas las filas de la matriz de tamaño $[m \times n]$ de coeficiente a_{ij} usando el mínimo costo de subconjuntos de las columnas (Toth and Vigo, 2002). El modelo matemático en su versión general se presenta a continuación:

4.3. Notación Matemática

- i Índice de las filas, $i = 1, 2, \ldots, m$.
- j Índice de las columnas, $j = 1, 2, \ldots, n$.
- A= Matriz binaria con dimensiones $m \times n$ y coeficiente a_{ij}.
- c_j Costo no negativo asociado a cada columna j.
- x_j Variable de decisión que toma el valor de 1 si la columna j está en la solución k y 0 de lo contrario.
- S Subconjunto de costo mínimo, $S \subseteq J$

4.4. Modelo Matemático

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in S} c_j * x_j \tag{5}$$

$$s.a.$$

$$\sum_{j \in S} a_{ij} * x_j \leq 1 \qquad \forall\, i = 1 \ldots m \tag{6}$$

La Ecuación (5) representa la función objetivo, que busca disminuir la suma de los costos asociados a las columnas seleccionadas dentro de la solución del problema.

La ecuación 6 es el conjunto de restricciones que busca que cada una de las filas i sea cubierta por lo menos por una columna $j \in S$.

5. Formualción Matemática Propuesta para el problema de Rostering

Analizando los dos modelos anteriores y el problema de asignación a tratar en esta investigación, se formula matemáticamente el problema de Rostering como un modelo lineal entero con una variable de decisión de 3 subíndices y una auxiliar de 2 subíndices. El modelo general propuesto en esta investigación se describe medianta los conjuntos de ecuaciones(7) - (13), sin embargo, dicho modelo puede ser modificado añadiendo conjuntos de restricciones que sean necesarios para representar diferentes problemas reales.

5.1. Modelo Matemático General Propuesto

5.1.1. Definición de variables

- i: Índice de trabajadores disponibles, $i = 1, 2, \ldots, I$.
- j: Índice de días del horizonte del róster, $j = 1, 2, \ldots, J$.
- k: Índice de tipos de turnos, $k = 1, 2, \ldots, K$.
- x_{ijk}: Variable de decisión que toma el valor de 1 si el trabajador i es asignado al día j en el turno k y 0 de lo contrario.
- y_{ik}: Variable auxiliar que toma el valor del número de tipos de turnos k que realiza un trabajador i durante el róster.

5.1.2. Definición de parámetros

- Ps Numero de turnos que pueden ser asignados a un trabajador.
- D_k Duración del turno k.
- JO Tiempo máximo permitido que puede ser asignado a un trabajador en un róster.

- L Máximo número de días que pueden ser asignados a un trabajador en un horizonte de tiempo.
- Req_{jk} Número de trabajadores requeridos en un día j en un turno k.
- Min_i Mínimo de días que deben de ser asignados a un trabajdor i en un horizonte de tiempo.
- c_k Costo asociado al tipo de turno k.

5.1.3. Modelo Matemático General Propuesto

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} c_k * y_{ik} \tag{7}$$

$s.a.$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \leq Ps \qquad \forall i, j \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} * D_k \leq JO \qquad \forall i \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \leq L \qquad \forall i \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ijk} \leq Req_{jk} \qquad \forall j, k \tag{11}$$

$$\sum_{j=J}^{I} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \leq Min_i \qquad \forall i \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ijk} \leq y_{ik} \qquad \forall i, k \tag{13}$$

La Ecuación (7) representa la función objetivo planteada para el problema, que busca disminuir el costo de asignación de personal dándole un mayor costo c_k a aquellos turnos que incurren en mayor gastos administrativos, así como aquellos que generan molestias

realacionadas al confort en el personal.
En la Ecuación (8) se modela el conjunto de restricciones que se encargan de no permitir la asignación a un trabajador i en más de un turno de trabajo k el mismo día j.
El conjunto de restricciones para limitar que un trabajador i trabaje la cantidad de horas a la semana permitidas por ley, están recogidas en la Ecuación (9).
En la Ecuación (10) representa las restricciones relacionadas al máximo de días a la semana que puede trabajar un colaborador acorde a lo establecido en la legislación laboral o en las políticas de la empresa.
La Ecuación (11) modela la restricción que busca asignar la cantidad exacta de personal en cada uno de los turnos, por cada uno de los días.
La Ecuación (12) asigna un mínimo de veces en la semana a los trabajadores.
La Ecuación (13) se encarga de asociar la variable auxiliar y_{ik} con la variable de decisión x_{ijk}, asignándole el valor de la suma de cantidad de turnos k realizados por el trabajador i.

El modelo planteado en esta investigación tiene como variante del *Set Covering* que no se tiene en cuenta un *pool* definido en el problema general como S. Sino que éste evalúa todas las opciones posibles, así construyendo un róster por cada uno de los trabajadores i.

5.2. Formulación Matemática para las instancias de Musliu

Las instancias presentadas por Musliu (2006), contien tres (3) tipos de turno D, A y N, que correponden al turno de la mañana, de la tarde y de la noche respectivamente. Además, cada instancia tiene una serie de secuencias de asignación prohibidas, un requerimiento de personal, cantidad mínima de turnos y días de descanso que deben ser asignados, cantidad máxima de turnos y días de descanso que pueden ser asignados. Las instancias fueron clasificadas en tres (3) grupos según las secuencias prohibidas, donde para cada grupo se añadieron una serie de restricciones dependiendo de las secuencias que no estaban permitidas. La clasificación quedó de la siguiente manera:

- Instancias con prohibición AD: [Instancias 12 y 17]

- Instancias con prohibición NA, ND y AD [Instancias 1,2,3,8,9,10,11,13,16,18 y 19].
- Instancias con prohibición NA, ND, AD, N-A, N-N, N-D y A-D (Instancias 5, 6, 14, 15 y 20).

5.2.1. Modelo Matemático Propuesto Instancias con Prohibición AD

Este grupo de instancias tienen en común la misma secuencia de asignación no permitida, la cual restringe asignar a un trabajador en un turno de la mañana si el día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de la tarde. El resto de las características de cada instancia es diferente y es tomada como parámetros del modelo. El modelo matemático formulado con la nueva restricción, se representa mediante el conjunto de ecuaciones (14)-(20).

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} C_k * Y_{ik} \tag{14}$$

$s.a.$

$$\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq Tr \qquad \forall i, j \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} * D_k \leq JO \qquad \forall i \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq L \qquad \forall i \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ijk} \leq Req_{jk} \qquad \forall j, k \forall i \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ijk} \leq Max_k \qquad \forall i \tag{19}$$

$$X_{ij2} + X_{i(}j+1)_1 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{20}$$

El conjunto de ecuaciones (14)-(19) son las mismas ecuaciones del modelo general propuesto en el conjunto de ecuaciones (7)-(13).

La ecuación (20) es la añadida para poder resolver estos casos específicos, la cual se encarga de restringir que un trabajador i asignado a un turno tipo A (tarde) $k = 2$, sea asignado al día inmediatamente siguiente $(j + 1)$ a un turno tipo D (mañana) $k = 1$.

5.2.2. Modelo Matemático Propuesto Instancias con Prohibición NA, ND y AD

Este grupo de instancias tienen parámetros de entrada diferentes, pero tienen en común las siguientes secuencias no permitidas de asignar:

- **Secuencia NA**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno de la tarde (A), si al día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de la noche (N).
- **Secuencia ND**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno del día (D), si al día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de la noche (N).
- **Secuencia AD**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno del día (D), si al día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de la tarde (A).

El modelo matemático con las restricciones adicionales para poder resolver este conjunto de casos específico, se encuentra expresado en el siguiente conjunto de ecuaciones (21)-(29):

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} C_k * Y_{ik} \tag{21}$$

$s.a.$

$$\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq Tr \qquad \forall i, j \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} * D_k \leq JO \qquad \forall i \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq L \qquad \forall i \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ijk} \leq Req_{jk} \qquad \forall j, k \forall i \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ijk} \leq Max_k \qquad \forall i \tag{26}$$

$$X_{ij2} + X_{i(}j+1)_1 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{27}$$

$$X_{ij3} + X_{i(}j+1)_1 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{28}$$

$$X_{ij3} + X_{i(}j+1)_2 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{29}$$

El conjunto de ecuaciones (21)-(26) son las mismas ecuaciones del modelo general propuesto en el conjunto de ecuaciones (7)-(13).

La ecuación (27) se comporta de manera similar a la ecuación 20, teniendo la misma función de restringir la asignación de la secuencia **AD**.

La ecuación (28) es incorporada con el objetivo restringir que un trabajador i asignado a un turno tipo N (noche) $k = 3$, sea asignado al día inmediatamente siguiente $(j + 1)$ a un turno tipo D (mañana) $k = 1$.

La ecuación (29) es incorporada con el objetivo restringir que un trabajador i asignado a un turno tipo N (noche) $k = 3$, sea asignado al día inmediatamente siguiente $(j + 1)$ a un turno tipo A (tarde) $k = 2$.

5.2.3. Modelo Matemático Propuesto Instancias con Prohibición NA, ND, AD, N-A, N-N, N-D y A-D

Este último grupo de instancias tienen una serie de secuencias especiales, que son secuencias de tres (3) días, lo cual restringe más la asignación. Las secuencias que no están permitidas son las siguientes:

- **Secuencia NA**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno de la tarde (A), si al día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de la noche (N).
- **Secuencia ND**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno de día (D), si al día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de la noche (N).
- **Secuencia AD**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno de día (D), si al día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de la tarde (A).
- **Secuencia N-A**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno de la tarde (A), si el día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de descanso (-) y si dos (2) días antes fue asignado a un turno de la noche (N).
- **Secuencia N-N**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno de la noche (N), si el día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de descanso (-) y si dos (2) días antes fue asignado a un turno de la noche (N).
- **Secuencia N-D**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno de día (D), si el día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de descanso (-) y si dos (2) días antes fue asignado a un turno de la noche (N).

- **Secuencia A-D**: Restringe la asignación de un trabajador a un turno de día (D), si el día inmediatamente anterior fue asignado a un turno de descanso (-) y si dos (2) días antes fue asignado a un turno de la tarde (A).

El modelo matemático con las restricciones adicionales para poder resolver este conjunto de instancias, se encuentra expresado en el siguiente conjunto de ecuaciones (30)-(42):

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} C_k * Y_{ik} \tag{30}$$

$s.a.$

$$\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq Tr \qquad \forall i, j \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} * D_k \leq JO \qquad \forall i \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq L \qquad \forall i \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ijk} \leq Req_{jk} \qquad \forall j, k \forall i \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ijk} \leq Max_k \qquad \forall i \tag{35}$$

$$X_{ij2} + X_{i(}j+1)_1 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{36}$$

$$X_{ij3} + X_{i(}j+1)_1 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{37}$$

$$X_{ij3} + X_{i(}j+1)_2 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{38}$$

$$X_{ij3} + X_{i(}j+1)_4 + X_{i(}j+1)_1 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{39}$$

$$X_{ij3} + X_{i(}j+1)_4 + X_{i(}j+1)_2 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{40}$$

$$X_{ij3} + X_{i(}j+1)_4 + X_{i(}j+1)_3 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{41}$$

$$X_{ij2} + X_{i(}j+1)_4 + X_{i(}j+1)_1 \leq 1 \qquad \forall i, j \backslash \{J\} \tag{42}$$

El conjunto de ecuaciones (30)-(35) son las mismas ecuaciones del modelo general propuesto en el conjunto de ecuaciones (7)-(13).

La ecuación (36) se comporta de manera similar a la ecuación (20), teniendo la misma función de restringir la asignación de la secuencia **AD**.

La ecuación (37) tiene la función de restringir la secuencia **ND**, siendo formulada de la misma manera que la ecuación (28).

La ecuación (38) tiene la función de restringir la secuencia **NA**, siendo formulada de la misma manera que la ecuación (29).

La ecuación (39) es incorporada con el objetivo restringir la asignación de un trabajador i que fue asignado un turno tipo N (noche) $k = 2$, el día inmediatamente siguiente $(j + 1)$ fue asignado a un día de descanso $k = 4$, sea asignado a un turno tipo D (día) $k = 1$ al día siguiente $j + 2$.

La ecuación (40) es incorporada con el objetivo restringir la asignación de un trabajador i que fue asignado un turno tipo N (noche) $k = 2$, el día inmediatamente siguiente $(j + 1)$ fue asignado a un día de descanso $k = 4$, sea asignado a un turno tipo A (tarde) $k = 1$ al día siguiente $j + 2$.

La ecuación (41) es incorporada con el objetivo restringir la asignación de un trabajador i que fue asignado un turno tipo N (noche) $k = 2$, el día inmediatamente siguiente $(j + 1)$ fue asignado a un día de descanso $k = 4$, sea asignado a un turno tipo N (noche) $k = 1$ al día siguiente $j + 2$.

La ecuación (42) es incorporada con el objetivo restringir la asignación de un trabajador i

que fue asignado un turno tipo A (tarde) $k = 2$, el día inmediatamente siguiente $(j + 1)$ fue asignado a un día de descanso $k = 4$, sea asignado a un turno tipo D (día) $k = 1$ al día siguiente $j + 2$.

5.3. Formulación Matemática para empresa operadora de transporte del AMCO

El caso de la empresa operadora del AMCO difiere de los casos publicados por Musliu (2006) en la cantidad de turnos, ya que en el sistema masivo de transporte se necesitan cubrir 49 turnos correspondientes a la sección troncal y 72 turnos correspondientes a la sección de alimentación. Por este motivo se tuvo que realizar una caracterización de los turnos según la hora de inicio y terminación de estos, resultando 4 grupos de tipo de turno que son los siguientes:

- **Grupo 1 (G_1)**: Contiene todos los turnos de la mañana, los cuales según el Área de Operaciones de la empresa, son todos aquellos que inician desde las 4 AM hasta las 8 AM.
- **Grupo 2 (G_2)**: Son todos los turnos de la tarde, los cuales son todos aquellos que inician después de las 8 AM y terminan antes de las 9 PM, según el Área de Operaciones de la empresa.
- **Grupo 3 (G_3)**: Es el grupo de turnos de la noche, los cuales según el área de operaciones son los que acaban después de las 9 PM.
- **Grupo 4 (G_4)**: Son los turnos mixtos, los cuales son aquellos que no pueden ser clasificados en ninguno de los tres (3) grupos anteriores. Esto debido a que su hora de inicio es antes de las 8 AM y su hora de terminación es después de las 9 PM.

Para poder ingresar estos grupos en la formulación, se debe agregar un nuevo subíndice que represente los grupos en la formulación. Este subíndice, que será denominada como s, reemplazará el subíndice k en la variable Y_{ik}.

Las restricciones del modelo matemático para el caso de la empresa operadora del AMCO buscan reflejar dos tópicos: (i) la legislación colombiana y (ii) las políticas internas de las empresas al momento de realizar su asignación. Para (i), el Código Sustantivo del trabajo expone las siguientes restricciones: Título VI, capítulo II en el artículo 161 parágrafo d.Código Sustantivo del Trabajo (2004), las cuales se mencionan a continuación:

1. Duración máxima de jornada de trabajo de ocho (8) horas.
2. Máximo seis días de trabajo continuo.
3. Mínimo un día de descanso en la semana.
4. Mínimo un domingo de descanso al mes.
5. Máxima cantidad de horas a trabajar en un mes.
6. Pago de recargos económicos según el tipo de hora trabajada
7. Mínimo número de horas a descansar entre cambio de turnos.
8. Pago del salario mínimo con subsidio de transporte.

La empresa operadora del AMCO tiene dos políticas empresariales que se convierten en dos restricciones, relacionadas con secuencias de asignación que no están permitidas dentro de la empresa que son:

1. Los conductores que realizan un turno de noche, al día inmediatamente siguiente no pueden realizar un turno de la mañana.
2. Los conductores que realizan un turno mixto, al día inmediatamente siguiente no pueden realizar un tunro de la mañana.

5.3.1. Definición de variables

- i Índice de conductores disponibles, $i = 1, 2, \ldots, I$.
- j Índice de días del horizonte del róster, $j = 1, 2, \ldots, J$.
- k Índice de turnos a cubrir, $k = 1, 2, \ldots, K$.
- s Índice de grupos de turno, $s = 1, 2, \ldots, S$
- G_s Conjunto de turnos que se encuentran en el grupo s
- X_{ijk} Variable de decisión que toma el valor de 1 si el conductor i es asignado al día j en el turno k y 0 de lo contrario.
- Y_{is} Variable auxiliar que toma el valor del número de turnos tipo s que realiza conductor i durante el róster.

5.3.2. Definición de parámetros

- Ps Numero de turnos que pueden ser asignados a un conductor.
- D_k Duración del turno k.
- JO Minutos máximo de minutos permitidos trabajar por un conductor en el róster.
- L Máximo número de días que pueden ser asignados a un conductor.
- Req_{js} Número de conductores requeridos en un día j en un turno k.
- Min_i Mínimo de días que deben de ser asignados a un conductor i.
- Max_i Máximo número de días que pueden ser asignados a un conductor i.
- C_s Costo asociado al tipo de turno s.

El modelo matemático utilizado para la solución de este caso se encuentra representado en las ecuaciones (43)-(50). Donde se busca realizar la asignación de todos los servicios a un conductor durante una semana de la manera que sea más equitativa la distribución de los turnos que generan mayor malestar que son aquellos que pertenecen a $S = 3, 4$:

5.3.3. Modelo Matemático Propuesto caso AMCO

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{s=1}^{S} C_s * Y_{is} \tag{43}$$

$s.a.$

$$\sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq Tr \qquad \forall i, j \tag{44}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} X_{ijk} * D_k \leq JO \qquad \forall i \tag{45}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} X_{ijk} \leq L \qquad \forall i \tag{46}$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ijk} \leq Req_{jk} \qquad \forall j, k \forall i \tag{47}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K \in G_s} X_{ijk} \leq Y_{is} \qquad \forall i, s \tag{48}$$

$$\sum_{k=1}^{K \in G_3} X_{ijk} + \sum_{k=1}^{K \in G_1} X_{i(j+1)_k} \leq Y_{is} \qquad \forall i \tag{49}$$

$$\sum_{k=1}^{K \in G_4} X_{ijk} + \sum_{k=1}^{K \in G_1} X_{i(j+1)_k} \leq Y_{is} \qquad \forall i \tag{50}$$

La ecuación (43) representa la función objetivo formulada por el problema, siendo la misma ecuación (13) formulada en el modelo matemático general.

El conjunto de ecuaciones (44)-(47) tienen el mismo comportamiento del conjunto de ecuaciones (8)-(11), sólo cambiando el valor de sus parámetros.

La ecuación (48) es la encargada de asignar el valor a la variable auxiliar Y_{is}, el cual es la suma turnos k de tipo s realizados por un conductor i durante todo el róster.

La ecuación (49) es la encargada de restringir que un conductor que haya realizado un turno k de tipo noche $s = 3$ el día inmediatamente siguiente $j + 1$, realice un turno k de tipo mañana $s = 1$.

La ecuación (50) es la encargada de restringir que un conductor que haya realizado un turno k de tipo mixto $s = 4$ el día inmediatamente siguiente $j + 1$, realice un turno k de tipo mañana $s = 1$.

6. Resultados Computacionales

Para validar el modelo anteriormente propuesto, se buscaron instancias en la literatura relacionadas a casos de Rostering. Se encontró un trabajo publicado por Musliu (2006) donde propone un algoritmo genético para darle solución al problema de Rostering en veinte (20) instancias, donde cada una tiene requerimientos, número de trabajadores distintos y prohibiciones de asignación diferentes. Estas características fueron las ideales para realizar las pruebas de validación antes de resolver el problema de Rostering de la empresa operadora del AMCO.

Los modelos son

6.1. Compilación resultado de las instancias de Musliu

En la Tabla 1, se tiene el resumen de los resultados obtenidos al momento de realizar la implementación de las instancias citadas en Musliu (2006). Donde en la primera columna se indica el número de la instancia; la segunda columna indica el tiempo computacional que le tomó al Solver encontrar la solución exacta para ese grupo de instancias; en la siguiente columna se encuentran las secuencias que no pueden ser asignadas por operario; en la última columna se encuentra si la solución a la instancia es factible o no para la instancia indicada.

<table>
<tr><th>Instancia</th><th>CT(s)</th><th>Secuencias Prohibidas</th><th>Factibilidad</th></tr>
<tr><td>20</td><td rowspan="7"><1</td><td>ND</td><td>No</td></tr>
<tr><td>15</td><td>NA</td><td>No</td></tr>
<tr><td>14</td><td>AD</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>6</td><td>A-D</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>5</td><td>N-A</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>4</td><td>N-D</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td></td><td>N-N</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="11"><1</td><td rowspan="3">ND</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>18</td><td>No</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="4">NA</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="4">AD</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="2"><1</td><td rowspan="2">A D</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>12</td><td>No</td></tr>
</table>

Tabla 1: Compilación de resultados casos de prueba Musliu

6.2. Compilación resultados casos de la empresa operadora del AMCO

Para la solución del caso de la empresa operadora del AMCO, se resolvieron los dos casos por separado, donde en la Tabla (2) se compilan los resultados obtenidos para cada caso y se comparan con la asignación manual realizada por el Área de Operaciones de la empresa.

Sección de sistema de transporte	**Tiempo de cómputo (s)**	
	Programación Manual	***Modelo Matemático***
Alimentación	14400	5,29
Troncal	14400	1,07

Tabla 2: Comparación programación manual vs modelo matemático

7. Conclusiones y trabajos futuros

Se puede concluir de esta investigación que es el modelo general planteado, al mantener su estructura inicial en cada una de las pruebas, se convierte en un modelo flexible que cambia dependiendo de las necesidades específicas de la empresa, mediante la adición de restricciones. Al modelo matemático tener una zona de factibilidad y encontrar un punto óptimo, se puede decir que es viable de aplicar a un caso mucho más grande, gracias al poco tiempo computacional registrado al momento de dar la solución, lo cual contrastado con lo expuesto en Ernst et al. (2004), utilizar un modelo matemático resuelto por programación lineal, es conveniente siempre y cuando los tiempos computacionales no sobrepasen los costos incurridos en la operación. En comparación con Musliu (2006), la ventaja que el modelo tiene sobre la metaheurística *Búsqueda Tabú* es que en este caso se llega al óptimo factible, mientras que en la otra metodología se plantea una trayectoria, que después de ser realizada, arroja la mejor solución conocida hasta el momento. Es decir, el modelo matemático siempre arrojará el óptimo mientras que la *Búsqueda Tabú* arroja una solución que no sabemos si es el óptimo hasta no compararlo con una metodologia exacta.

En el caso de la solución obtenida para el caso de la empresa operadora del AMCO, se puede observar en la Tabla (2) que el modelo matemático resuelve el problema en un tiempo computacional mucho menor que lo que se tarde en resolver el problema la persona encargada de la programación de conductores en el Área de Operaciones de la empresa. Siendo una alternativa para apoyar la toma de decisión del personal, para que en el tiempo que se ahorra utilizando esta herramienta, pueda ser ocupado realizando otro tipo de actividades con relación a su cargo.

7.1. Trabajos futuros

A continuación se presentan una serie de trabajos futuros, que pueden ser resultado de investigaciones futuras sobre el tema.

- Extender la metodología de solución combinando el problema de programación de tripulación (Crew Scheduling Problem CSP) y el problema de rostering, donde se tenga como función objetivo minimizar el personal que se necesita para cubrir la operación de la empresa.
- Realizar una nueva formulación matemática donde el horizonte de tiempo del róster sea mayor (Un mes, seis meses o todo el año, i. e., todo el contrato del conductor).
- Incrementar el modelo propuesto aumentándole un subíndice a la variable de decisión para que pueda resolver el problema del sistema masivo en su totalidad (Troncal y alimentación).
- Construir una librería que se pueda compartir en la literatura especializada con diferentes variaciones de CS hecho en la empresa operadora del AMCO.

Referencias

Carlos S Azmat and Marino Widmer. A case study of single shift planning and scheduling under annualized hours: A simple three-step approach. *European Journal of Operational Research*, 153(1):148–175, 2004.

RALF BORND, Markus Reuther, Thomas Schlechte, Christof Schulz, Elmar Swarat, and Steffen Weider. Duty rostering in public transport. 2015.

R Borndörfer, M Reuther, T Schlechte, C Schulz, E Swarat, and S Weider. Duty rostering in public transport-facing preferences. *Fairness, and Fatigue*, 44, 2015.

Avishai Ceder. *Public transit planning and operation: Modeling, practice and behavior*. CRC press, 2007.

Código Sustantivo del Trabajo. Decreto 2663 de 1950. *Editorial Unión Ltda. Bogotá DC*, 2004.

George B Dantzig. Letter to the editor—a comment on edie's "traffic delays at toll booths". *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(3):339–341, 1954.

Denis Dowling, Mohan Krishnamoorthy, Harley Mackenzie, and David Sier. Staff rostering at a large international airport. *Annals of Operations Research*, 72:125–147, 1997.

Andreas T Ernst, Houyuan Jiang, Mohan Krishnamoorthy, and David Sier. Staff scheduling and rostering: A review of applications, methods and models. *European journal of operational research*, 153(1):3–27, 2004.

Niklas Kohl and Stefan E Karisch. Airline crew rostering: Problem types, modeling, and optimization. *Annals of Operations Research*, 127(1-4):223–257, 2004.

Jihui Ma, Tao Liu, and Wenyi Zhang. A genetic algorithm approach to the balanced bus crew rostering problem. *Journal of Traffic and Logistics Engineering*, 2(1), 2014.

Daniel Alfredo Mahn Borkowsky et al. *Crew Scheduling y Crew Rostering en trenes* *subterráneos: un método secuencial de solución*. PhD thesis, Universidad de Concepción. Facultad de Ingeniería. Departamento de . . . , 2013.

Silvano Martello and Paolo Toth. Generalized assignment problems. In *International Symposium on Algorithms and Computation*, pages 351–369. Springer, 1992.

Margarida Moz, Ana Respício, and Margarida Vaz Pato. Bi-objective evolutionary heuristics for bus driver rostering. *Public Transport*, 1(3):189, 2009.

Nysret Musliu. Heuristic methods for automatic rotating workforce scheduling. *International Journal of Computational Intelligence Research*, 2(4):309–326, 2006.

Diego Fernando Quintero Moncada et al. Diseño de un modelo de asignación de turnos para la operación de sistemas de transporte masivo tipo brt. Master's thesis, Universidad de la Sabana, 2013.

Jorge Andrés Quintero Toro et al. *Modelo de optimización para vehículos de transporte publico colectivo urbano*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia.

JP Sousa, J Falcão, R Guimarães, J Paixão, and M Gist. Um sistema de apoio à decisão para o planejamento operacional de transportes colectivos. *Casos de Aplicação da Investigação Operacional, McGraw-Hill*, pages 109–130, 2000.

Robert J. Thieruf. Investigación de operaciones ii. 2008.

Paolo Toth and Daniele Vigo. *The vehicle routing problem*. SIAM, 2002.

Anthony Wren and Jean-Marc Rousseau. Bus driver scheduling—an overview. In *Computer-aided transit scheduling*, pages 173–187. Springer, 1995.

Lin Xie and Leena Suhl. Cyclic and non-cyclic crew rostering problems in public bus transit. *Or Spectrum*, 37(1):99–136, 2015.

8. Anexo 1

8.1. Solución Grupo de Instancias con Prohibición AD

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
1	A	A	-	D	D	D	-
2	D	D	-	A	-	D	A
3	A	A	-	D	D	A	-
4	D	-	D	D	D	A	-
5	A	A	-	A	A	-	D
6	A	A	A	-	D	-	D
7	A	-	A	-	-	-	D
8	D	D	A	-	A	-	D
9	D	-	-	D	-	D	D
10	-	-	D	A	A	A	A
11	D	D	D	A	-	D	D
12	-	-	D	A	-	A	-
13	A	-	A	-	D	D	D
14	A	-	D	D	-	D	D
15	A	-	A	-	D	-	D
16	-	A	-	D	D	A	-
17	D	A	A	-	A	A	-
18	D	-	D	D	A	-	D
19	D	D	A	-	-	D	A
20	D	D	A	-	D	D	-
21	D	D	-	A	A	-	A
22	D	D	D	-	A	-	A
23	-	D	A	A	A	A	-
24	-	D	-	D	D	D	A

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
25	A	A	-	D	D	A	-
26	-	A	-	-	D	-	D
27	-	D	D	D	-	D	A
28	D	-	A	-	D	A	A
29	A	-	D	D	-	D	-
30	-	D	D	A	A	A	-
31	-	A	A	A	A	-	D
32	-	D	D	A	-	D	A
33	D	A	-	D	D	-	A

Tabla 3: Solución Instancia 17 Musliu

8.2. Solución Grupo de Instancias con Prohibición NA, ND y AD (Instancias 19)

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	D	N	N	-	D	-
2	-	N	N	-	A	N	N
3	-	A	-	D	D	A	N
4	-	D	D	A	N	-	A
5	A	N	-	N	N	-	D
6	D	A	A	A	-	A	-
7	N	-	D	-	D	D	D
8	A	-	A	A	A	N	-
9	N	-	-	D	A	A	A

Tabla 4: Solución Instancia 1 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	-	N	N	N	N	N	-
2	N	-	D	A	-	N	N

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
3	-	D	-	D	D	D	A
4	N	-	D	D	A	A	-
5	-	N	N	-	-	D	A
6	A	A	A	N	N	-	-
7	A	-	-	A	A	A	N
8	D	A	A	-	-	-	D
9	D	D	-	-	D	-	D

Tabla 5: Solucion Instancia 2 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	D	N	-	D	-	A
2	D	-	-	A	A	A	A
3	A	N	-	-	N	N	N
4	-	D	-	A	N	-	A
5	-	-	D	D	A	A	A
6	N	N	N	-	D	-	D
7	-	D	-	A	A	N	-
8	N	-	A	A	-	A	N
9	D	-	A	-	A	N	N
10	A	A	-	D	N	-	D
11	N	-	D	N	N	-	N
12	D	A	N	N	-	A	-
13	A	A	A	N	-	D	-
14	A	A	A	-	-	D	D
15	A	N	-	D	-	D	-
16	D	D	D	-	D	D	-
17	N	-	D	D	D	N	-

Tabla 6: Solución Instancia 3 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	D	A	-	D	-	-
2	N	-	N	N	N	-	-
3	D	D	D	-	D	-	-
4	N	-	A	A	A	-	N
5	A	N	-	D	D	A	-
6	-	A	N	-	D	-	N
7	A	A	A	N	-	A	-
8	D	D	D	D	A	-	-
9	A	N	-	D	A	-	N
10	-	D	D	D	D	-	-
11	A	A	N	N	-	D	-
12	-	A	A	A	-	D	-
13	A	A	A	A	A	-	-
14	D	D	D	A	N	-	-
15	N	-	D	D	A	-	-
16	D	N	-	A	-	-	-

Tabla 7: Solución Instancia 8 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	D	D	A	A	-	-
2	D	D	D	N	-	-	-
3	N	-	A	A	N	-	-
4	N	-	D	D	D	-	-
5	N	-	A	A	A	-	-
6	A	N	N	-	A	-	-
7	A	A	A	A	N	A	-
8	D	A	A	A	-	A	-
9	-	A	-	D	D	-	-

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
10	A	A	-	D	D	A	-
11	D	A	A	N	-	-	-
12	N	-	A	A	A	-	-
13	N	N	-	D	D	-	-
14	A	-	D	A	A	-	N
15	-	D	D	D	D	D	-
16	A	A	A	A	A	-	-
17	-	A	N	N	-	A	-
18	A	N	-	D	D	-	-
19	D	D	A	-	D	-	-
20	-	A	A	-	D	-	N
21	A	A	-	D	D	-	N
22	D	D	D	D	-	D	-
23	A	N	N	-	D	-	-
24	-	D	D	N	N	-	N
25	N	-	A	A	A	-	-
26	N	N	-	D	A	-	N
27	D	A	A	A	A	-	-
28	-	D	D	A	A	-	-
29	A	N	-	D	D	-	N
30	D	D	A	A	-	D	-
31	D	A	N	-	A	A	-
32	A	A	A	N	-	-	N
33	A	N	N	N	-	-	N
34	D	D	N	-	D	D	-
35	A	N	-	D	-	D	-
36	-	N	N	-	A	-	-
37	-	D	D	D	D	D	-

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
38	D	D	D	D	D	-	-
39	-	D	D	D	A	-	-
40	N	-	D	A	N	-	-
41	A	A	N	-	D	A	-
42	D	D	D	D	N	-	-
43	D	D	D	N	N	-	-
44	D	D	A	A	A	-	-
45	A	A	A	A	A	-	-
46	N	-	D	N	-	-	-
47	D	A	N	N	-	-	N

Tabla 8: Solución Instancia 9 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	N	N	-	D	-	D	D
2	A	A	A	A	N	-	-
3	D	D	N	-	D	-	-
4	D	D	D	N	N	-	-
5	-	A	A	N	-	A	A
6	D	D	N	-	A	-	-
7	N	N	-	A	N	N	-
8	N	-	A	N	-	-	D
9	-	D	D	D	N	-	A
10	-	D	D	N	N	-	D
11	A	N	-	-	A	A	A
12	-	D	D	A	A	-	N
13	D	A	A	A	-	D	-
14	D	N	N	-	A	-	D
15	A	N	-	D	D	N	-

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
16	N	-	D	D	D	D	-
17	A	A	A	N	-	-	N
18	A	A	A	A	A	-	-
19	A	A	-	D	A	A	-
20	-	A	A	A	A	-	N
21	D	N	N	N	N	-	-
22	N	N	N	N	-	N	-
23	N	-	N	-	D	D	-
24	-	D	-	D	D	A	A
25	N	-	D	D	D	-	-
26	A	-	D	A	N	-	-
27	D	-	N	-	D	N	N

Tabla 9: Solución Instancia 10 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	-	A	-	D	D	D	D
2	D	A	-	D	D	-	D
3	D	D	A	A	-	-	N
4	-	D	D	D	D	A	-
5	A	-	D	D	N	-	D
6	D	D	D	D	-	D	-
7	D	D	D	-	A	N	-
8	D	A	-	-	D	D	D
9	N	-	D	-	D	D	D
10	-	-	D	D	D	A	A
11	-	-	D	D	D	D	A
12	D	D	D	D	-	-	D
13	-	D	D	A	-	D	A

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
14	D	D	D	-	D	D	-
15	D	A	-	-	D	D	D
16	-	D	A	A	-	D	D
17	-	D	A	N	-	D	D
18	D	N	-	-	D	D	D
19	D	D	D	D	D	-	-
20	D	A	A	A	-	-	D
21	D	A	-	A	-	D	D
22	D	D	-	A	-	D	A
23	-	D	A	A	-	D	D
24	D	A	-	D	D	D	-
25	A	-	D	D	A	-	D
26	D	D	A	-	D	A	-
27	D	D	-	D	D	D	-
28	D	D	N	-	A	-	A
29	-	D	-	D	D	A	A
30	A	-	D	D	D	-	A

Tabla 10: Solución Instancia 11 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	-	A	-	D	D	D	D
2	A	-	-	D	D	D	A
3	D	D	D	D	A	-	-
4	D	D	A	N	-	D	-
5	D	A	-	D	D	-	-
6	A	-	D	A	-	D	-
7	-	A	-	D	D	A	A
8	-	A	-	D	D	A	A

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
9	-	D	D	D	D	A	-
10	A	-	-	D	A	-	-
11	D	D	A	-	D	D	-
12	D	D	A	-	-	D	A
13	A	-	D	A	-	D	D
14	D	D	A	A	-	D	-
15	D	-	D	A	-	D	D
16	D	A	-	D	D	-	A
17	A	-	A	N	-	D	D
18	-	D	D	-	D	D	D
19	A	-	D	D	A	-	D
20	-	D	D	D	A	A	-
21	-	D	D	-	A	A	A
22	D	D	A	-	A	A	-
23	-	D	A	-	-	-	A
24	D	A	-	D	D	N	-

Tabla 11: Solución Instancia 13 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	-	D	-	D	D	D
2	A	A	N	-	D	D	-
3	D	D	D	D	-	D	-
4	D	D	A	-	A	-	D
5	D	D	A	-	D	D	-
6	D	N	-	D	A	-	A
7	N	-	D	A	-	D	D
8	-	D	A	-	D	D	D
9	-	D	A	A	A	-	-

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
10	D	-	D	D	D	-	D
11	-	D	-	D	D	D	D
12	-	A	-	A	N	-	D
13	D	A	-	D	-	D	D
14	D	D	D	D	-	A	-
15	-	D	D	N	-	D	-
16	D	-	D	D	A	-	D
17	D	D	-	D	D	-	D
18	D	D	D	-	-	D	D
19	D	D	D	-	-	D	N
20	D	D	-	A	A	A	-
21	A	-	-	D	D	D	A
22	A	-	D	D	D	-	D
23	D	-	-	D	D	D	A
24	A	A	A	-	D	-	D
25	-	-	D	D	D	D	D
26	-	D	D	D	A	-	-
27	D	A	-	D	-	D	A
28	A	-	D	A	-	A	-
29	-	-	D	D	D	A	A

Tabla 12: Solución Instancia 16 Musliu

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
1	D	A	A	A	-	-	N
2	-	A	A	-	D	D	A
3	-	D	D	D	A	-	A
4	D	D	D	D	-	-	A
5	N	N	-	A	A	N	-

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
6	-	A	-	D	D	D	D
7	D	A	-	A	A	A	-
8	D	A	A	A	-	-	A
9	D	D	D	A	A	-	-
10	D	D	D	D	-	-	D
11	D	-	D	D	-	D	D
12	D	D	D	D	-	-	A
13	D	A	N	-	D	A	-
14	-	D	A	N	-	D	D
15	D	-	A	A	-	D	D
16	D	D	-	D	D	-	A
17	A	-	D	D	D	A	-
18	-	D	D	D	A	A	-
19	-	D	D	A	-	D	D
20	D	-	-	D	D	D	A
21	A	-	D	A	N	-	A
22	-	D	D	D	A	-	D
23	A	-	D	N	-	D	D
24	-	D	D	D	A	-	A
25	A	A	A	-	D	D	-
26	D	D	D	A	-	-	D
27	D	D	D	A	-	D	-
28	D	D	A	-	A	-	A
29	A	A	-	D	D	D	-
30	D	D	A	-	A	N	-
31	D	A	A	A	-	D	-
32	-	D	-	D	D	D	D
33	-	A	-	D	D	D	D

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
34	D	D	A	-	D	-	D
35	A	A	A	A	-	D	-
36	D	A	-	D	A	N	-
37	-	N	-	D	D	D	D
38	-	D	D	D	-	D	D
39	-	D	D	A	-	D	D
40	D	D	-	D	A	-	A
41	N	-	D	D	D	A	-
42	-	D	-	D	D	D	D
43	N	-	D	A	-	D	D
44	D	A	-	D	D	-	A
45	A	-	D	D	D	A	-
46	D	D	-	-	D	D	D
47	N	-	D	A	-	D	D
48	D	-	D	D	-	A	A
49	D	-	D	-	D	D	D
50	-	D	A	N	-	D	D
51	-	D	A	A	-	D	D
52	D	-	A	A	A	-	D
53	-	-	D	D	D	A	A
54	-	D	D	D	A	N	-
55	-	-	D	D	N	N	N
56	-	-	D	D	D	D	A
57	D	D	N	-	D	A	-
58	A	A	-	A	N	-	D
59	A	-	-	D	A	A	N
60	A	-	D	D	D	-	A
61	A	A	-	-	D	A	A

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
62	D	D	D	D	-	-	D
63	-	D	D	D	A	A	-
64	A	-	D	D	A	-	D
65	A	A	A	-	D	A	-
66	-	D	-	D	D	D	D
67	-	-	D	D	D	D	A
68	D	-	D	D	D	-	D
69	D	D	A	-	D	A	-
70	A	-	D	D	-	D	D
71	D	-	D	D	-	D	D
72	-	A	-	D	A	A	A
73	-	A	N	-	D	A	A
74	A	-	A	-	D	D	A
75	-	A	N	N	-	D	D
76	D	-	-	D	D	D	A
77	A	A	-	D	D	A	-
78	D	A	A	-	-	D	D
79	A	-	D	D	-	D	D
80	D	D	-	D	D	-	A
81	-	-	D	D	D	D	D
82	D	-	A	-	D	D	D
83	A	-	D	A	-	A	N
84	D	D	A	A	-	D	-
85	D	-	D	-	D	D	D
86	D	N	N	-	A	-	D
87	A	-	D	D	-	D	N
88	D	N	-	D	D	-	D
89	A	-	D	-	D	D	D

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
90	D	D	-	-	D	D	D
91	D	D	D	D	-	D	-
92	D	D	-	D	D	A	-
93	D	A	-	D	A	-	D
94	D	D	-	-	D	D	D
95	A	-	D	A	A	A	-
96	D	D	D	D	D	-	-
97	-	D	D	D	D	A	-
98	D	D	-	-	D	D	D
99	-	D	D	N	-	D	D
100	-	D	A	-	A	-	-
101	D	D	D	-	D	A	D
102	D	D	-	A	D	D	D
103	-	D	D	-	-	D	-
104	D	D	D	-	A	A	-
105	-	D	D	-	D	-	D
106	D	D	-	-	D	D	D
107	A	-	D	D	-	D	-
108	D	D	D	-	-	A	A
109	-	D	A	-	D	D	D
110	-	D	-	-	D	D	A
111	-	D	D	D	D	D	-
112	D	D	D	-	A	A	-
113	A	A	-	-	D	D	D
114	D	D	A	-	A	-	D
115	D	D	-	D	D	D	-
116	D	A	-	D	N	-	-
117	D	D	A	-	D	-	D

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
118	A	-	D	A	N	-	D
119	D	N	-	A	A	-	D
120	A	A	A	-	D	-	D

Tabla 13: Solución Instancia 19 Musliu

8.3. Solución Grupo de Instancias con Prohibición NA, ND, AD, N-A, N-N, N-D y A-D

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	A	A	A	A	A	A	-
2	-	D	D	D	D	D	-
3	D	-	D	D	D	D	-
4	D	D	A	A	A	-	-
5	A	A	N	-	-	D	-
6	D	D	D	D	N	-	-
7	-	A	A	N	-	-	-
8	A	A	A	A	A	A	-
9	D	D	D	D	D	A	-
10	A	N	-	-	D	D	-
11	A	A	A	A	A	A	-
12	N	-	-	D	D	D	-
13	D	D	D	A	A	A	-

Tabla 14: Solucion Instancia 4 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	D	D	D	-	D	-
2	-	D	D	D	D	D	-
3	A	N	-	-	D	A	-
4	D	A	A	A	A	-	-

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
5	-	D	N	N	N	-	-
6	N	N	N	N	N	-	-
7	N	N	N	N	-	-	N
8	A	A	A	A	N	-	-
9	N	-	-	D	A	A	N
10	D	-	D	-	D	D	N
11	A	A	A	A	A	A	-

Tabla 15: Solución Instancia 5 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	D	D	A	A	-	-
2	A	A	A	-	-	D	-
3	D	D	-	D	D	A	N
4	N	N	N	N	N	-	-
5	A	A	A	A	A	A	-
6	N	N	N	N	N	-	-
7	-	-	D	D	D	D	N

Tabla 16: Solución Instancia 6 Musliu

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	D	D	D	A	A	-
2	A	A	-	A	A	A	A
3	N	N	N	N	N	-	-
4	-	D	D	D	D	D	D
5	N	N	-	-	D	D	D
6	D	D	D	D	-	D	A
7	D	D	A	A	-	-	-
8	A	-	A	A	A	A	A
9	D	D	D	D	D	D	-

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
10	D	D	D	D	D	A	-
11	D	D	D	D	D	D	-
12	A	A	A	N	N	-	-
13	D	A	N	-	-	-	D

Tabla 17: Solución Instancia 14 Musliu

9. Anexo 2

9.1. Solución sección troncal para empresa operadora de transporte del AMCO

Trabajador	L	M	X	J	V	S	D
1	D	M	-	D	N	N	-
2	D	D	N	-	D	-	-
3	M	N	N	-	N	-	-
4	D	-	M	-	D	M	-
5	D	N	-	D	D	-	D
6	D	D	-	M	-	M	-
7	-	-	D	D	N	-	M
8	D	-	-	-	-	D	M
9	D	-	M	N	-	-	D
10	M	N	N	-	D	D	-
11	D	-	D	N	N	-	-
12	-	D	D	D	-	-	-
13	D	D	-	-	N	-	D
14	-	N	-	D	N	-	D
15	-	-	D	D	-	D	-
16	-	-	-	-	D	-	D
17	M	-	N	N	-	N	-
18	N	-	D	-	D	D	D
19	D	M	-	D	N	-	-
20	D	-	D	N	-	D	D
21	-	D	D	D	D	-	-
22	-	-	M	M	M	-	M
23	-	D	D	D	-	D	D
24	-	D	-	D	D	-	-

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
25	M	M	-	D	D	D	-
26	D	D	M	-	D	-	D
27	-	D	N	N	-	N	N
28	N	N	-	M	N	-	N
29	-	M	-	N	-	M	M
30	M	-	D	D	-	M	N
31	-	N	N	-	D	D	D
32	D	D	D	M	-	N	-
33	N	-	-	D	D	-	M
34	-	-	D	-	-	-	M
35	D	D	N	-	N	-	D
36	-	D	D	D	-	D	-
37	-	N	-	D	D	M	-
38	-	D	N	-	D	-	D
39	N	-	M	M	N	-	-
40	-	D	D	D	D	N	-
41	-	-	M	M	N	-	D
42	-	-	D	D	D	D	D
43	-	D	N	-	N	N	N
44	-	D	D	-	N	-	D
45	M	M	-	D	M	M	-
46	N	N	N	N	-	D	-
47	N	N	-	N	-	D	D
48	-	D	M	N	-	-	-
49	-	-	-	N	N	-	D
50	-	-	N	-	M	N	N
51	N	-	D	-	-	-	-
52	M	M	N	-	D	D	-

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
53	-	D	-	-	-	D	-
54	-	M	-	-	M	M	-
55	-	D	-	D	-	D	D
56	N	N	-	N	-	D	-
57	D	D	-	D	-	D	N
58	N	-	-	-	N	-	D
59	D	M	M	-	-	-	D
60	N	-	-	-	-	D	-
61	-	D	N	-	M	-	M
62	N	-	M	-	M	M	-
63	-	D	D	M	-	M	-
64	D	-	-	D	D	D	-
65	N	N	-	N	-	-	-
66	D	-	D	-	D	-	-
67	-	N	-	-	-	-	D
68	D	D	-	M	-	-	D
69	M	-	D	-	-	-	-
70	D	M	N	-	-	D	-
71	M	-	-	N	N	N	-
72	N	N	-	N	-	-	M
73	-	M	-	-	M	-	-
74	N	-	N	-	D	D	-
75	-	-	-	-	D	N	-
76	N	-	N	N	-	-	D
77	D	-	D	M	-	D	M
78	-	-	D	-	M	N	-
79	D	D	-	D	D	D	-
80	D	-	D	N	-	N	-

Trabajador	**L**	**M**	**X**	**J**	**V**	**S**	**D**
81	-	-	D	-	D	N	-
82	N	N	-	D	M	-	N

Tabla 18: Solución Problema de Rostering para la sección troncal de la empresa operadora del AMCO